Philosophie de l'algèbre dynamique

L'algèbre dynamique est un programme de recherche dont le but est d'exhiber le contenu calculatoire des démonstrations de l'algèbre, et particulièrement lorsque celui-ci est rendu opaque par l'usage d'outils comme le lemme de Zorn.

Comme nous allons le voir sur un exemple paradigmatique, ce travail est de nature à fournir une perspective nouvelle sur les concepts en jeu à la fois dans l'énoncé d'un théorème que dans le déroulement de sa démonstration. En effet, il amène à forger de nouveaux objets qui reflètent les calculs réalisés.

Ce programme de recherche a plusieurs versants. Un premier est de nature purement algébrique et correspond à un travail de clarification. Un deuxième, de nature logique, est une réflexion sur la forme des raisonnements et donne lieu à l'étude des « théories géométriques du premier ordre », ou « théories cohérentes », et des « théories géometriques infinitaires » ; cette réflexion consiste paradoxalement à débarrasser les calculs de la logique. Un troisième s'inscrit dans la théorie des catégories et fait le lien avec les topos de Grothendieck.

Un exemple paradigmatique

Les entiers relatifs, $\mathbb{Z}$, donnent lieu à un corps de fractions, $\mathbb{Q}$, dont le groupe multiplicatif, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, forme, au signe près, le *groupe de divisibilité de l'anneau d'intégrité* $\mathbb{Z}$, dont les éléments sont ordonnés par la relation de divisibilité $|$: on dit que $q \mid r$ si $r/q \in \mathbb{Z}$. Cet ordre n'est pas total : il se peut qu'on ait à la fois $q \nmid r$ et $r \nmid q$, par exemple $1 \nmid \frac{3}{2}$ et $\frac{3}{2} \nmid 1$. Cependant, le groupe de divisibilité peut être plongé dans un produit cartésien de groupes totalement ordonnés, grâce à la décomposition unique d'un nombre rationnel non nul q comme produit de facteurs premiers : q s'écrit $q = \pm 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} 11^{\alpha_{11}} \cdots$, et on peut envoyer q sur $\varphi(q) = (2^{\alpha_2}, 3^{\alpha_3}, 5^{\alpha_5}, 7^{\alpha_7}, 11^{\alpha_{11}}, \cdots)$ dans le produit cartésien des puissances de 2, de 3, de 5, de 7, de 11, etc., chacun totalement ordonné par divisibilité. En d'autres mots, l'ordre de divisibilité est une conjonction d'ordres totaux.

La conséquence pratique de ceci est que tout calcul dans le groupe de divisibilité correspond à ce même calcul dans chacun de ces groupes totalement ordonnés de puissances de nombre premier, et que si ce calcul aboutit au même résultat dans chacun de ces groupes totalement ordonnés, ce sera encore le cas dans le groupe de divisibilité.

Le théorème fondamental des anneaux intègres de Krull donne la contrepartie abstraite de cette observation. Mais dans l'énoncé de ce théorème, la contrepartie des nombres premiers, les « valuations », résultent d'une application du lemme de Zorn. Intuitivement, cela se voit dans l'argument ci-dessus par le fait que les nombres premiers tombent du ciel.

C'est Paul Lorenzen (1915-1994) qui a clarifié ce théorème et en a révélé la nature dynamique. Celle-ci est que pour tout calcul dans le groupe de divisibilité d'un anneau d'intégrité « intégralement clos », on peut toujours *faire l'hypothèse que les éléments du groupe qui apparaissent dans le calcul sont totalement ordonnés.* Faire cette hypothèse rend le calcul *dynamique* au sens suivant : pour deux éléments q et r du calcul, on a le droit d'ouvrir deux branches dans ce calcul. Dans la première, on suppose que $q \mid r$; dans la deuxième, que $r \mid q$. Si on aboutit au même résultat dans les deux branches, alors on aboutit à ce résultat aussi sans avoir fait cette hypothèse.

Analyse philosophique

Nous commençons par fournir une description du cheminement et des motivations de Lorenzen, sur la base de la correspondance inédite avec Wolfgang Krull (1899-1971).

Le cadre ontologique dans lequel se place le théorème fondamental des anneaux intègres de Krull est celui de la théorie des ensembles dans une forme actualiste : le lemme de Zorn aboutit à l'existence des valuations parce que l'univers des objets étudiés est supposé exister au préalable. En d'autres mots, des définitions imprédicatives donnent lieu à l'existence des objets recherchés.

Quel est le cadre ontologique de l'algèbre dynamique ? C'est celui des « définitions inductives ». Plutôt que de garantir un cadre immuable pour toute preuve à venir, les définitions inductives construisent le cadre d'un calcul de manière concomitante avec ce calcul. La possibilité de ces définitions résulte à chaque fois du constat d'une structure arborescente qui n'admet pas de détour, ou dont tout détour est éliminable. Il s'agit donc d'une ontologie dynamique, dans laquelle les objets ont la même plasticité que les raisonnements.

Nous conclurons sur la manière dont les deux cadres ontologiques s'éclairent réciproquement.

Références

COSTE, Michel, Henri LOMBARDI, et Marie-Françoise ROY. Dynamical method in algebra : effective Nullstellensätze. *Ann. Pure Appl. Logic*, 111 (3), 2001, p. 203–256. http://dx.doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00026-4.

LORENZEN, Paul. Über halbgeordnete Gruppen. *Math. Z.*, 52, 1950, p. 483–526. http://eudml.org/doc/169131.